Merkhilfe Mathematik

Die nachfolgenden Ausführungen stellen keine Formelsammlung im klassischen Sinne dar.

Insbesondere werden die verwendeten Bezeichnungen nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Teil 1: Stoffgebiet der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-r} = 1/a^r$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$\frac{a^r}{b^r} = (a/b)^r$$

Logarithmen

$$\log_{a}{bc} = \log_{a}b + \log_{a}c$$

$$\log_{a}{b/c} = \log_{a}b - \log_{a}c$$

$\log_{a}{b^r} = r \cdot \log_{a} b$

Strahlensätze

Ist $AB \parallel A'B'$, so gilt:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

((2))

Rechtwinkliges Dreieck

- Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$
- Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$
- $\sin a = a/c$; $\cos a = b/c$; $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = a/b$

Allgemeines Dreieck

Sinussatz: $a : b : c = \sin a : \sin b : \sin y$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos a$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos b$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos y$$

Sinus und Kosinus

$$\sin(-f) = -\sin f$$

$$\cos(-f) = \cos f$$

$$(\sin f)^2 + (\cos f)^2 = 1$$

sin(90° -~f) =cos~f

cos(90° -~f) =sin~f

Figurengeometrie

- Gleichseitiges Dreieck: A =a^2/4 *\sqrt{3}
- Trapez: A =\frac{a +c}{2} *h
- Kreis: U =2r~p; A =r^2~p

Raumgeometrie:

- Prisma: V =G *h
- Pyramide: V =1/3 G *h
- Gerader Kreiszylinder: V =r^2 *~p *h; M =2r *~p *h
- Gerader Kreiskegel: V =1/3 r^2 *~p *h; M =r *~p *m
- Kugel: V =4/3 *r^3 *~p; O =4r^2 *~p

((3))

Teil 2: Analysis

Grenzwerte:

\lim \limits_{x \to +\infty} \frac{x^r}{e^x} =0

\lim \limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} =0

\lim \limits_{x \to 0} [x^r *\ln x] =0 (jeweils r >0)

Ableitung:

- Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate): \frac{f(x) -f(x_0)}{x -x_0}
- f'(x_0) =\lim \limits_{x \to x_0} \frac{f(x) -f(x_0)}{x -x_0}, falls der Grenzwert existiert und endlich ist

- Schreibweisen: $f'(x) = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dy} = y'$

Ableitungen der Grundfunktionen:

$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = 1/x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Ableitungsregeln:

- Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- Faktorregel: $f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$
- Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
- Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

((4))

Anwendungen der Differentialrechnung:

- Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$
- Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$
- Monotonie:

$f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I

$f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I

- Extrempunkte:
Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Extrempunkt.
- Krümmung:
$f'(x_0) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt
$f'(x_0) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt
- Wendepunkte:
Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Newton'sche Iterationsformel:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

$I(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow I'(x) = f(x)$

Bestimmtes Integral:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ (F ist eine Stammfunktion von f)

((5))

Unbestimmte Integrale:

$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int{e^x}dx = e^x + C$

$\int{\ln(x)}dx = -x + x \cdot \ln(x) + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

$\int{f'(x)e^{f(x)}}dx = e^{f(x)} + C$

$\int{f(ax + b)}dx = 1/a \, F(ax + b) + C$ (F ist eine Stammfunktion von f)

Teil 3: Stochastik

Binomialkoeffizient:

$(n \choose k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)}{k!}$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Urnenmodell:

- Ziehen ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind werden n Kugeln ohne zurücklegen gezogen.

P(„genau k schwarzen Kugeln“) $= \frac{(K \choose k) \cdot (N - K \choose n - k)}{(N \choose n)}$

- Ziehen mit Zurücklegen

Aus einer Urne, in der der Anteil schwarzer Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

P(„genau k schwarzen Kugeln“) $= (n \choose k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n - k)}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$P_A(B) =\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Unabhängigkeit zweier Ereignisse:

$P(A \cap B) =P(A) *P(B)$

Zufallsgrößen - Binomialverteilung:

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, …, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, …,p_n$ an. Dann gilt:

- Erwartungswert:
$\sim m =E(X) =\sum_(i =1)^n{x_i *p_i)} =x_1 *p_1 +x_2 *p_2 + …+x_n *p_n$
- Varianz:
$Var(X) =\sum_(i =1)^n{(x_i -\sim m)^2 *p_i} = (x_1 -\sim m)^2 *p_1 +(x_2 -\sim m)^2 *p_2 +… +(x_n -\sim m)^2 *p_n$
- Standardabweichung:
$\sim s =\sqrt{Var(X)}$

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach B(n; p), so gilt:

- $P(X =k) =B(n; p; k) =(n \\ k) *p^k *(1 -p)^(n -k)$
- Erwartungswert: $E(X) = n *p$
- Varianz: $Var(X) =n *p *(1 -p)$

Signifikanztest:

- Fehler 1. Art: H_0 wird irrtümlich abgelehnt

- Fehler 2. Art: H_0 wird irrtümlich nicht abgelehnt

Als Signifikanzniveau bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

((7))

Teil 4: Geometrie

Skalarprodukt im IR^3:

- Definition: \vec{a} \circ \vec{b} =\vaa_1 \\ a_2 \\ a_3\ve \circ \vab_1 \\ b_2 \\ b_3\ve =a_1 *b_1 +a_2 *b_2 +a_3 *b_3
- zueinander senkrechte Vektoren: \vec{a} \perp \vec{b} \Lra \vec{a} \circ \vec{b} =0

-Betrag eines Vektors: |\vec{a}| =\sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}

- Einheitsvektor: \vec{a^0} =\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}

-Winkel zwischen zwei Vektoren:

cos~f =\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| *|\vec{b}|} mit 0 <=~f <=~p

Vektorprodukt im IR^3:

- Definition: \vec{a} \times \vec{b} =\vaa_2b_3 -a_3b_2 \\ a_3b_1 -a_1b_3 \\ a_1b_2 -a_2b_1\ve
- Richtung: \vec{a} \times \vec{b} steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b}
- Betrag: |\vec{a} \times \vec{b}| =|\vec{a}| *|\vec{b}| *sin~f mit 0 <=~f <=~p- Flächeninhalt F des Dreiecks ABC: F =1/2 *|\vec{AB} \times \vec{AC}|
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCD: V =1/6 *|\vec{AB} \circ (\vec{AC} \times \vec{AD})|

Mittelpunkt einer Strecke [AB]:

\vec{M} =1/2 (\vec{A} +\vec{B})

Schwerpunkt S des Dreiecks ABC:

$\vec{S} =1/3 (\vec{A} +\vec{B} +\vec{C})$

((8))

Ebene im IR^3:

- Parameterform von E: $\vec{X} =\vec{A} +~l\vec{u} +~m\vec{v}$
- Normalenform von E in Vektordarstellung: $\vec{n} \circ (\vec{X} -\vec{A}) =0$
- Normalenform von E in Koordinatendarstellung: $n_1x_1 +n_2x_2 +n_3x_3 +n_0 =0$

Kugelgleichung:

$(x_1 -m_1)^2 +(x_2 -m_2)^2 +(x_3 -m_3)^2 =r^2$